УДК 629 DOI: 10.30977/VEIT.2025.28.0.3

Методи розрахунку реалізованого зчеплення між шиною автомобільного колеса та поверхнею дорожнього покриття

Леонтьєв Д. М.[1], Сметанін Г. В.[1], Володін В. В.[1,2], Малий В. М.[1], Рябушенко О. В.[1], Товт Б. М.[3]

[1]Харківський національний автомобільно-дорожній університет, Україна
[2]Комунальний заклад «Харківський ліцей № 154 Харківської міської ради», Україна
[3]Дніпровський державний аграрно-економічний університет, Україна

Надійшла: 09.09.2025. Прийнято: 04.12.2025. Опубліковано: 08.12.2025. *Відкритий доступ: CC BY 4.0.*

Анотація. *Забезпечення безпеки дорожнього руху не можливе без точного прогнозування поведінки транспортного засобу у різних умовах експлуатації, тому визначення реалізованого зчеплення шини з поверхнею дорожнього покриття є актуальною задачею. В роботі проведено поглиблений аналіз літературних джерел і математичних моделей, здійснено чисельне моделювання з фіксованими значеннями ключових точок «f – S діаграми» та проведено порівняльну оцінку точності отриманих результатів. Встановлено, що не всі моделі дають повноцінний опис процесу реалізації зчеплення в усьому діапазоні ковзання шини. Частина рівнянь забезпечує високу точність лише у режимах часткового ковзання, водночас інші відомі моделі мають значні похибки та обмежену придатність. Отримані дані можуть бути використані при створенні пневматичних шин, оптимізації систем активної безпеки та високоточних симуляторів руху транспортних засобів на дорогах з різним покриттям.*

Ключові слова: *реалізоване зчеплення; коефіцієнт зчеплення;. шина; автомобільне колесо; поверхня дорожнього покриття.*

Вступ

Методи розрахунку реалізованого зчеплення шини автомобільного колеса з поверхнею дорожнього покриття є важливими для забезпечення безпеки руху транспортних засобів.

Точні розрахунки зчеплення дозволяють прогнозувати поведінку автомобіля за різних умов, зокрема на мокрому, слизькому або засніженому покритті.

Це особливо актуально для розвитку сучасних систем активної безпеки, таких як антиблокувальна система, система стабілізації руху транспортного засобу, система розподілу гальмового зусилля.

Слід відзначити, що правильний вибір методу розрахунку реалізованого зчеплення шини автомобільного колеса із поверхнею дорожнього покриття дозволяє забезпечити раціональне проектування шини та виконати підбір її характеристик.

Аналіз публікацій

Як показує аналіз науково-технічної літератури існує багато методів розрахунку реалізованого зчеплення, які дозволяють виконати обчислення значень зчеплення в залежності від різних факторів, що впливають на реалізацію зчеплення шини автомобільного колеса з поверхнею дорожнього покриття. Розглянемо детальніше ці методи.

Найвідомішим методом визначення реалізованого зчеплення в залежності від ковзання шини, в плямі контакту, відносно поверхні дорожнього покриття є метод, який запропонований *H. Pacejka* [1].

Цитування: Леонтьєв, Д., Сметанін, Г., Володін, В., Малий, В., Рябушенко, О., Товт, Б. (2025). Методи розрахунку реалізованого зчеплення між шиною автомобільного колеса та поверхнею дорожнього покриття. *Автомобіль і електроніка. Сучасні технології*, (28), 25–36. https://doi.org/10.30977/VEIT.2025.28.0.3

Запропоноване ним рівняння (1) для визначення f_x він представив у вигляді так званої «Магічної формули», яка є апроксимацією результатів багатьох експериментальних досліджень виконаних для шин різних типорозмірів та конструкцій:

$$f_x = D_0 \cdot \sin\left(C \cdot \arctan\left(B_s \cdot S^* - \right.\right.$$
$$\left.\left. -E \cdot \left(B_s \cdot S^* - \arctan\left(B_s \cdot S^*\right)\right)\right)\right) - S_v, \quad (1)$$

де C – коефіцієнт, що визначає вид "f - S діаграми" (вибирається в межах 1,8 ÷ 2,0); D_0 – коефіцієнт, що визначає значення максимуму реалізованого зчеплення (f_m); B_s – коефіцієнт, що визначає критичне ковзання шини, обирається в межах 5 ÷ 10; E – коефіцієнт, що впливає на значення величини тертя шини в момент 100% ковзання шини відносно поверхні дорожнього покриття (змінюється в межах 0,5 ÷ 1,1); S_v – величина, на яку зміщується f - S діаграма по вертикальній шкалі (можна прийняти рівним величині коефіцієнту опору кочення (f_0) автомобільного колеса); S^* – поздовжнє прослизання колеса з урахуванням зсуву початку «f - S діаграми», визначається за залежністю:

$$S^* = S + S_h,$$

де S_h – горизонтальне зміщення «f - S діаграми».

Слід відзначити, що формула (1) дозволяє будувати реалізоване зчеплення шини автомобільного колеса з поверхнею дорожнього покриття для будь яких режимів кочення колеса. Тобто ця формула може бути використана в діапазоні ковзання S від значення мінус 1 до значення плюс 1.

Існує також метод визначення реалізованого зчеплення, який базується на так званій залежності *Burckhardt* [2], яка запропонована для визначення реалізованого зчеплення між шиною та поверхнею дорожнього покриття для гальмового режиму кочення колеса. Це друга за поширеністю залежність, що використовується для опису зміни реалізованого зчеплення залежно від ковзання. Вона представлена в експоненціальному вигляді, як рівняння (2):

$$f_x = \left(A_1 \cdot \left(1 - e^{-A_2 \cdot S}\right) - A_3 \cdot S\right) \times$$
$$\times \frac{e^{-A_4 \cdot S \cdot V_x}}{R_{z_ст}} \cdot \left(1 + \frac{R_{z_ст}^2}{R_z}\right), \quad (2)$$

де $A_1 = f_m$ – коефіцієнт, що дорівнює максимуму кривої f – S діаграми; A_2 – коефіцієнт, що визначає форму «f – S діаграми» і може бути розрахований численним методом за залежністю:

$$A_2 \cdot e^{A_2 \cdot S_k} = \frac{A_3 \cdot 1000}{A_1};$$

$A_3 = (f_m - f_b)$ – коефіцієнт, який враховує падіння реалізованого зчеплення від максимуму (f_m) до коефіцієнта тертя (f_b) шини о поверхню дорожнього покриття при повному блокуванні колеса; S_k – критичне ковзання шини відносно поверхні дорожнього покриття; A_4 – коефіцієнт, що характеризує вологість довкілля, можна прийняти з діапазону 0,02–0,04; R_z – динамічне навантаження на автомобільне колесо; R_{z_st} – статичне навантаження на автомобільне колесо; V_x – швидкість руху автомобіля, м/с.

Наступний метод для визначення реалізованого зчеплення уявляє собою залежність Denny, яку запропонував в своїй роботі [3] відомий німецький дослідник Mark Denny. Він запропонував використовувати для опису «f – S діаграми», в режимі гальмування автомобільного колеса, модифіковану модель авторів *U. Kiencke* та *A. Daiss* у вигляді:

$$f_x = \frac{a_0 \cdot S}{b_0 + c_0 \cdot S + S^2}, \quad (3)$$

де a_0, b_0, c_0 – коефіцієнти, що залежать від значень f_m, f_b та S_k.

Коефіцієнти a_0, b_0, c_0 автор роботи [3] пропонує визначити за рівняннями:

$$a_0 = \frac{f_m \cdot f_b \cdot \left(1 - S_k\right)^2}{f_m - f_b};$$

$$b_0 = S_k^2;$$

$$c_0 = \frac{f_b \cdot \left(1 + S_k^2\right) - 2 \cdot f_m \cdot S_k}{f_m - f_b}.$$

На відміну від залежності Denny залежність запропонована авторами U. Kiencke та

A. Daiss в їх роботі [4] має дещо інший вигляд, але вона так само, як і залежність Denny з достатньою точністю дозволяє розрахувати величину f_x в залежності від проковзування (S) пневматичної шини відносно поверхні дорожнього покриття тільки в режимі гальмування автомобільного колеса:

$$f_x = k_s \cdot \frac{S}{c_1 \cdot S^2 + c_2 \cdot S + 1}, \qquad (4)$$

де k_s – коефіцієнт, який враховує характер нахилу кривої «$f - S$ діаграми» в діапазоні значень S від 0 до 1; c_1 та c_2 – коефіцієнти, що визначають форму кривої «$f - S$ діаграми».

Коефіцієнти k_s, c_1 та c_2, що входять в рівняння (4) можна визначити з наступних рівнянь:

$$k_s = f_b \cdot (c_1 + c_2 + 1);$$

$$c_1 = \frac{1}{S_k^2};$$

$$c_2 = \frac{f_b \cdot (1 + S_k^2) - 2 \cdot f_m \cdot S_k}{S_k^2 \cdot (f_m - f_b)}.$$

В роботах [5] для опису реалізованого зчеплення в режимі гальмування автомобільного колеса, також згадується метод, який має дуже простий вигляд, який можна представити у вигляді рівняння (5):

$$f_x = b_1 \cdot \sqrt{S} - b_2 \cdot S, \qquad (5)$$

де b_1 та b_2 – коефіцієнти, які відповідають за форму кривої «$f - S$ діаграми».

Слід зазначити, що у разі коли ставиться задача розрахунку реалізованого зчеплення для значень S від 0 до S_k, рівняння (5) забезпечує достатню точність розрахунку, яку можна співставити з лінійними моделями реалізованого зчеплення.

Для такого випадку, коефіцієнти b_1 та b_2, що входять до рівняння (5) можна визначити з залежностей:

$$b_1 = \frac{f_m - f_b \cdot S_k}{\sqrt{S_k} - S_k};$$

$$b_2 = b_1 - f_b.$$

У разі ж використання рівняння (5) для моделювання процесу блокування автомобільного колеса, тобто при значеннях S від значення критичного проковзування S_k до значення 100% ковзання S=1, точність розрахунків може не відповідати дійсності процесу, а похибка розрахунків може змінюватися від 0 до 60% (нуль відсотків в точках f_m та f_b при відповідних значеннях S).

Аналіз рівняння (5) показав, що у разі його адаптації до точніших розрахунків реалізованого зчеплення, в режимі гальмування автомобільного колеса, необхідно його модифікувати у систему (6), яку не складно вирішити на відповідних ділянках значення проковзування $S \in [0, S_k]$ та $S \in [S_k, 1]$:

$$f_x = \begin{cases} b_S \left(2\sqrt{S_k S} - S\right) + f_0, & S \in [0, S_k]; \\ b_C \left(2\sqrt{S_k S} - S - S_k\right) + f_m, & S \in [S_k, 1], \end{cases} \qquad (6)$$

де b_S та b_C – коефіцієнти, які визначають форму «$f - S$ діаграми» на відповідних ділянках значення проковзування S.

Коефіцієнти b_S та b_C визначаються з відповідних рівнянь:

$$b_S = \frac{f_m - f_0}{S_k};$$

$$b_C = \frac{f_m - f_b}{(1 + S_k) - 2 \cdot \sqrt{S_k}}.$$

Слід зазначити, що система рівнянь (6) на відміну від рівняння (5) враховує зсув величини реалізованого зчеплення відносно нуля по вертикальній шкалі, який виникає із-за коефіцієнта опору кочення (f_0) автомобільного колеса [6, 7].

Ще одним з методів, який звертає на себе увагу, є метод розрахунку реалізованого зчеплення, що базується на рівнянні кубічної параболи, яке запропоновано в роботі [8]:

$$f_x = \frac{\alpha_1}{3} \cdot (S - \alpha_2)^3 + \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2^3}{3}, \qquad (7)$$

де α_1 та α_2 – коефіцієнти кубічної параболи.

Аналіз формули (7) показує, що коефіцієнти α_1 та α_2 точно визначають характер зміни реалізованого зчеплення тільки на ділянці від 0 до S_k. На ділянці від S_k до 1 рівняння (7) не має аналітичного рішення і тому воно може

бути вирішено тільки, якщо припустити, що α_1 є функція від S. Всебічний аналіз рівняння (7) показує, що значення α_2 дорівнює S_k для значень проковзування $S \in [0,1]$.

Коефіцієнт α_1 на ділянці від 0 до S_k має однозначне рішення, яке можна представити у вигляді рівняння:

$$\alpha_1 = \frac{3 \cdot f_m}{S_k^3}.$$

Оскільки на ділянці від S_k до 1 кубічне рівняння (7) не має однозначного рішення, коефіцієнт α_1 можна представити у вигляді функції від проковзування:

$$\alpha_1(S) = \frac{3 \cdot \left(\frac{(f_m - f_b) \cdot (S-1)}{(S_k - 1)} + f_b \right)}{(S - S_k)^3 + S_k^3},$$

яка побудована на основі припущення, що характер зміни реалізованого зчеплення від значення f_m до значення f_b лінійно змінюється на ділянці від S_k до 1.

Існує також модель реалізованого зчеплення, яка базується на експоненціальному законі, що представляється у вигляді рівняння:

$$f_x = f_b \left(1 - e^{\frac{S}{S_0}}\right)\left(1 + e^{\frac{S}{S_1}}\right), \qquad (8)$$

де S_0 та S_1 – це коефіцієнти, що визначають форму «$f - S$ діаграми».

Рівняння (8) не має аналітичного рішення, але коефіцієнти S_0 та S_1 можна визначити за емпіричними рівняннями виду:

$$S_0 = -0,4 \cdot S_k;$$

$$S_1 = \frac{f_b - f_m}{1.1 \cdot f_m}.$$

У роботі [9] для опису «f - S діаграми», в режимі гальмування автомобільного колеса, пропонується використовувати систему рівнянь (9), що побудовані на основі парабол:

$$f_x = \begin{cases} a_1 \cdot S^2 + b_1 \cdot S + f_0, & S \in [0, S_k]; \\ a_2 \cdot S^2 + b_2 \cdot S + c_1, & S \in [S_k, 1]. \end{cases} \qquad (9)$$

Коефіцієнти a_1, a_2, b_1, b_2 та c_1 нескладно визначити з наступних рівнянь:

$$a_1 = \frac{S_k \cdot d_0 - f_m + f_0}{S_k^2};$$

$$b_1 = \frac{2 \cdot (f_m - f_0) - d_0 \cdot S_k}{S_k};$$

$$c_1 = \frac{S_k^2 (f_b + d_1) - S_k (2 \cdot f_m + d_1) + f_m}{S_k^2 - 2 \cdot S_k + 1};$$

$$a_2 = \frac{S_k \cdot d_1 - f_m + c_1}{S_k^2};$$

$$b_2 = \frac{2 \cdot (f_m - c_1) - d_1 \cdot S_k}{S_k}.$$

Таким чином, задаючись коефіцієнтом тертя при повністю заблокованих колесах (f_b), максимальним реалізованим зчепленням (f_m), що реалізується між шиною та поверхнею дорожнього покриття, критичним ковзанням шини (S_k) і величинами прогину парабол ($d_0 \in [-0.5, 1]$, $d_1 \in [-0.5, 0]$), можна визначити характер зміни реалізованого зчеплення f_x в залежності від величини проковзування S.

З роботи [10] також відома залежність (10) яка за структурою схожа на залежність парабол (9), яка з достатньою точністю також дозволяє розрахувати значення реалізованого зчеплення в залежності від ковзання шини колеса відносно поверхні дорожнього покриття для режиму гальмування колеса:

$$f_x = \begin{cases} \frac{2 \cdot (f_m - f_0) \cdot S_k \cdot S}{S_k^2 + S^2} + f_0, & S \in [0, S_k]; \\ f_b + \frac{f_m - f_b}{(1 - S_k)^2} \cdot (1 - S)^2, & S \in [S_k, 1]. \end{cases} \qquad (10)$$

На відміну від рівняння (9), структура рівняння (10) є простішою і не потребує визначення додаткових коефіцієнтів, які визначають форму парабол на відповідних ділянках «f - S діаграми».

Також відома модель визначення реалізованого зчеплення між шиною та поверхнею дорожнього покриття в режимі гальмування колеса, яка базується на жорсткісних властивостях шини [11]. Така модель може бути представлена у вигляді нелінійного рівняння:

$$f_x = \frac{C_x \cdot S}{R_z \cdot (1-S)} \cdot f(s), \qquad (11)$$

де C_x – крутильна жорсткість пневматичної шини, Н·м/рад.

Функція f(s) пропонується авторами наукової роботи [11] у вигляді системи наступних рівнянь:

$$f(s) = \begin{cases} s \cdot (2-s), & s \in [0,1]; \\ 1, & s \in [1,\infty]. \end{cases}$$

Значення параметру s не складно визначити з рівняння:

$$s = \frac{f_m \cdot R_z \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot V_x \cdot \sqrt{S^2 + \tan^2(\alpha)}\right) \cdot (1-S)}{2 \cdot \sqrt{C_x^2 \cdot S^2 + C_\alpha^2 \cdot \tan^2(\alpha)}},$$

де ε – коефіцієнт, який враховує зниження значення f_m в залежності від швидкості руху автомобіля V_x (м/с); C_α – кутова жорсткість пневматичної шини, Н·м/рад; α – кут відведення шини, рад.

В роботах [12-14] пропонується метод, який також базується на жорсткісних властивостях шини. Цей метод може бути представлений у вигляді рівняння (12), яке на відміну від рівняння (11) має меншу кількість розрахункових параметрів, оскільки воно приведене до кута закручування шини в повздовжньому напрямку при гальмуванні колеса:

$$f_x = \frac{C_x \cdot \xi_x}{R_z \cdot r_d}, \qquad (12)$$

де ξ_x – кут закручування шини, рад; r_d – динамічний радіус колеса, м.

Для шин, які мають не одинарне ошинування, рівняння (12) записується у вигляді рівняння (13) [12]:

$$f_x = \frac{\alpha_ш \cdot C_{xср} \cdot \xi_x}{R_z \cdot r_d}, \qquad (13)$$

де $\alpha_ш \le 1$ – нелінійність впливу реалізації зчеплення між шинами здвоєних або строєних автомобільних коліс [12]; $C_{xср}$ – середня крутильна жорсткість пневматичних шини здвоєних або строєних коліс транспортного засобу [12], Н·м/рад.

В рівняннях (12) та (13), кут закручування шини відносно поверхні дорожнього покриття є функцією від проковзування S.

Автор наукового дослідження [12] пропонує визначати кут закручування шини за рівнянням:

$$\xi_x = \frac{a_0^\xi \cdot S}{S_k^2 + b_0^\xi \cdot S + S^2} + \xi_0,$$

де a_0^ξ, b_0^ξ – коефіцієнти, що залежать від значень кутів закручування ξ_m, ξ_b, ξ_0 та S_k.

Коефіцієнти a_0^ξ, b_0^ξ автори робіт [13, 14] пропонують визначити за рівняннями:

$$a_0^\xi = \frac{(\xi_m - \xi_0) \cdot (\xi_b - \xi_0) \cdot (1 - S_k)^2}{\xi_m - \xi_b};$$

$$b_0^\xi = \frac{(\xi_b - \xi_0) \cdot (1 + S_k^2) - 2 \cdot (\xi_m - \xi_0) \cdot S_k}{\xi_m - \xi_b}.$$

Слід зазначити, що серед математичних рівнянь (1) – (13), які описують реалізоване зчеплення шини з поверхнею дорожнього покриття, не всі рівняння дозволяють описати повну «f - S діаграму» [15-26] в залежності від величини ковзання шини (S) відносно поверхні дорожнього покриття в діапазоні значень ковзання $S \in [-1,1]$.

Аналіз показує, що з наведених вище рівнянь, тільки рівняння (1) дозволяє описати повну «f - S діаграму» для будь яких значень ковзання $S \in [-1,1]$.

Мета та постановка задачі

Метою роботи є визначення універсального методу розрахунку реалізованого зчеплення шини автомобільного колеса з поверхнею дорожнього покриття.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

- Аналіз методів розрахунку реалізованого зчеплення;
- Змоделювати характер перебігу зміни реалізованого зчеплення від різних факторів при однакових початкових умовах;
- Співставити результати моделювання за різними методами розрахунку реалі-

зованого зчеплення шини автомобільного колеса з поверхнею дорожнього покриття;

Повні методи розрахунку реалізованого зчеплення

Детальний аналіз рівнянь (3), (4), (12) та (13) дозволив встановити, що ці формули можуть бути використані для моделювання реалізованого зчеплення в діапазоні $S \in [-1,1]$, якщо змінити характер визначення коефіцієнтів a_0, b_0 та c_0, які визначають форму «f - S діаграми».

Так наприклад, якщо рівняння (3) перетворити на рівняння виду:

$$f_x = \frac{a_0 \cdot S}{b_0 + c_0 \cdot S + S^2} + f_0, \qquad (14)$$

коефіцієнти a_0, b_0 та c_0 визначатимуться з відповідних систем рівнянь:

$$a_0 = \begin{cases} \dfrac{(f_{m1} + f_0)\cdot(f_{b1} + f_0)\cdot(1 - S_{k1})^2}{f_{m1} - f_{b1}}, & S \in [-1,0]; \\ \dfrac{(f_{m2} - f_0)\cdot(f_{b2} - f_0)\cdot(1 - S_{k2})^2}{f_{m2} - f_{b2}}, & S \in [0,1]; \end{cases}$$

$$b_0 = \begin{cases} S_{k1}^2, & S \in [-1,0]; \\ S_{k2}^2, & S \in [0,1]; \end{cases}$$

$$c_0 = \begin{cases} \dfrac{2\cdot(f_{m1} + f_0)\cdot S_{k1} - (f_{b1} + f_0)\cdot(1 + S_{k1}^2)}{f_{m1} - f_{b1}}, & S \in [-1,0]; \\ \dfrac{(f_{b2} - f_0)\cdot(1 + S_{k2}^2) - 2\cdot(f_{m2} - f_0)\cdot S_{k2}}{f_{m2} - f_{b2}}, & S \in [0,1], \end{cases}$$

в діапазоні $S \in [-1,1]$.

Іншим підходом для опису реалізованого зчеплення шини автомобільного колеса з поверхнею дорожнього покриття, для діапазону $S \in [-1,1]$, можуть бути використані нормалізовані ступеневі функції, які можна представити у вигляді системи рівнянь (15).

Нормалізовані функції мають ступені D_1, D_2 та D_3, які визначають гладкість так званої «f - S діаграми». Якщо значення D_1, D_2 та D_3 дорівнюватимуть 1, то «f - S діаграма» .буде кусочно лінійною. Якщо D_1, D_2 та D_3 дорівнюватимуть 2, то «f - S діаграма» буде складатися з плавних дуг (парабол). У разі якщо D_1, D_2 та D_3 будуть більше 2, то «f - S діаграма» матиме більш виражені пологі вершини.

Досвід моделювання реалізованого зчеплення за рівнянням (15) показує, що параметр D_1, краще приймати рівним 1.5, параметр D_2 рівним 1, а параметр $D_3 \geq 3$, оскільки він відповідає за характер з'єднання двох функцій системи рівнянь (15) поблизу значення f_m.

Для моделювання реалізованого зчеплення між шиною та поверхнею дорожнього покриття в діапазоні проковзування $S \in [-1,1]$ може бути використана також одиничне рівняння (16), яке, як і рівняння (15) носить нормалізований характер, але базується на експоненціальному законі.

В рівнянні (16), як і в рівнянні (15) можна використовувати різні значення ключових точок «f - S діаграми» f_{mi}, f_{bi} та S_{ki} для режиму гальмування (індекс i = 1) та режиму розгону (індекс i = 2) автомобільного колеса.

Коефіцієнти k_1, k_2, k_3 та k_4, які є складовою частиною рівняння (16) визначають форму так званої «f - S діаграми». Під час моделювання доцільно використовувати наступні числові значення цих коефіцієнтів: $k_1 \geq 5$, $k_2 = 1$, $k_4 \geq 1$ (ціле), а k_3 визначається з залежності:

$$k_3 = 1 - \frac{f_{bi}}{f_0 + (f_{mi} - f_0)\cdot\left(1 - \exp\left(-k_1 / S_{ki}^{k_2}\right)\right)}.$$

Вочевидь, що рівняння (16) може бути спрощено для використання на практиці до вигляду рівняння (17), оскільки вираз $1\text{-}\exp(-k_1) \approx 1$, як і вираз $1\text{-}\exp(-k_1/(S_{ki})^{k_2}) \approx 1$.

$$f_x = \begin{cases} sign(S)\cdot f_{mi} - sign(S)\cdot(f_{mi} - f_{bi})\cdot\left(\dfrac{(sign(S)\cdot S - S_{ki})}{1 - S_{ki}}\right)^{D_1}, & \text{для } i = 1,2 \text{ при } S \in [-1, -S_{k1}] \cup [S_{k2}, 1]; \\ sign(S)\cdot f_{mi} - (f_0 + sign(S)\cdot f_{mi})\cdot\left(1 - \left(\dfrac{|S|}{S_{ki}}\right)^{D_2}\right)^{D_3}, & \text{для } i = 1,2 \text{ при } S \in [-S_{k1}, 0] \cup [0, S_{k2}]; \end{cases}$$

(15)

$$f_x = \left(\left(sign(S) \cdot f_{mi} + f_0 \right) \cdot \frac{\left(1 - \exp\left(-k_1 \left(|S|/S_{ki}\right)^{k_2}\right)\right)}{1 - \exp(-k_1)} - f_0 \right) \left(1 - k_3 \left(\frac{|S| - S_{ki}}{1 - S_{ki}} \right)^{k_4} \right), \quad S \in [-1,0] \cup [0,1]; \qquad (16)$$

$$f_x = \left(\left(sign(S) \cdot f_{mi} + f_0 \right) \cdot \left(1 - \exp\left(-k_1 \cdot \frac{|S|}{S_{ki}} \right) \right) - f_0 \right) \left(1 - \frac{\left(f_{mi} - f_{bi} \right) \cdot \left(|S| - S_{ki} \right)}{f_{mi} \cdot \left(1 - S_{ki} \right)} \right), \quad S \in [-1,0] \cup [0,1]. \qquad (17)$$

Хотілось би зазначити, що в даній роботі ми не розглядаємо процес моделювання колеса, яке буксує, бо цей режим передбачає суттєву зміну значення f_{b2} при постійному значенні $S = 1$. Оскільки такий процес є не тривіальним, розглянемо його в наступних публікаціях за цією тематикою.

Підводячи підсумки можна сказати, що для моделювання реалізованого зчеплення існує багато рівнянь, але не всі рівняння, дозволяють описати реалізоване зчеплення шини автомобільного колеса з поверхнею дорожнього покриття в гальмовому та тяговому режимі одночасно. Деякі методи можна використовувати тільки в одному з двох режимів руху транспортного засобу.

Аналізуючи науково-технічну літературу з тематики моделювання реалізованого зчеплення встановлено, що ключові точки [0, - f_0], [∓ S_{ki}, ∓ f_{mi}], [∓ 1, ∓ f_{bi}] так званої «f - S діаграми» не є сталими величинами і постійно змінюються в залежності від різних факторів: швидкості руху автомобіля (V_x), температури шини ($T_ш$), тиску в плямі контакту (p_k), тиску в пневматичній шині ($p_ш$), стану протектору шини, наявності шару води на поверхні дорожнього покриття, тощо. Вплив деяких з наведених параметрів на значення f_0, f_m та f_b розглянемо в одній з наступних публікацій, а в цій роботі проведемо імітаційне моделювання при фіксованих значеннях f_0, f_m, f_b та S_k.

Результати моделювання реалізованого зчеплення f_x при фіксованих значеннях ключових точок «f - S діаграми»

Маючи на меті отримати графічне уявлення про характер зміни реалізованого зчеплення шини автомобільного колеса з поверхнею дорожнього покриття в залежності від проковзування S приймемо наступні фіксовані значення f_0 = 0,012, f_{m1} = 0.9, f_{m2} = 0.8, f_{b1} = 0.6, f_{b2} = 0.5, S_{k1} = 0.15 та S_{k2} = 0.2, які є типовими для більшості одинарних шин легкових автомобілів, що експлуатуються по дорогах загального користування.

З метою порівняння результатів моделювання за різними рівняннями розділимо їх на дві групи:

– рівняння, що моделюють реалізоване зчеплення шини автомобільного колеса з поверхнею дорожнього покриття в режимі гальмування колеса;

– рівняння, що моделюють реалізоване зчеплення шини автомобільного колеса з поверхнею дорожнього в двох режимах (в режимі гальмування колеса та режимі його розгону).

До першої групи рівнянь, підходять рівняння (2) – (13), а для другої – рівняння (1), (14) – (17). Рівняння (4), (12) та (13), що можуть бути перетворені на рівняння з другої групи в даній роботі, перетворювати не будемо і виконаємо розрахунки за цими рівняннями тільки для гальмового режиму кочення автомобільного колеса. Результати розрахунків представимо в графічному вигляді (див. рис. 1 – 3).

При розрахунках за рівняннями (2) – (11) слід значення f_0, f_{m1}, f_{b1}, S_{k1} мають позитивний знак, але після розрахунків, з метою приведення до єдиних координат усіх отриманих графіків, зобразимо реалізоване зчеплення f_x для гальмового режиму на рисунку 1 та рисунку 2 у від'ємних координатах, помноживши отримані значення S та f_x на мінус один.

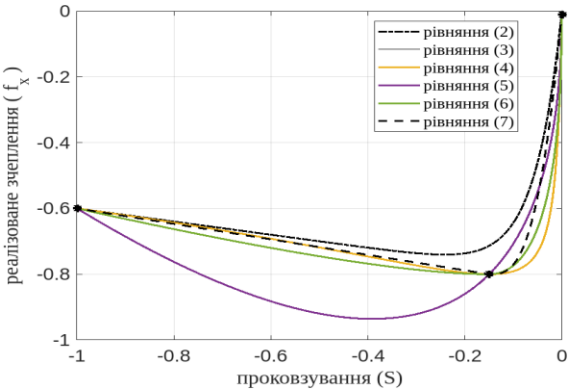

Рис. 1. Розрахунок реалізованого зчеплення за рівняннями (2) – (7) при позитивних значеннях f_0, f_{m1}, f_{b1}, S_{k1} зображених у від'ємних координатах S та f_x

На рисунку 1 розрахунки за рівнянням (3) та рівнянням (4) повністю збіглися один з одним, оскільки ці рівняння мають спільну математичну основу та відрізняються між собою тільки формою їх представлення та формою представлення їх коефіцієнтів.

З рисунку 1 можна побачити, що найбільш доцільними для використання, під час моделювання процесу кочення автомобільного колеса в гальмовому режимі, є рівняння (3), (4), (6) та (7). Навпроти, рівняння (2) та (5) мають суттєві похибки в розрахунках на окремих ділянках проковзування *S*, тому їх використання при моделюванні може призвести до отримання хибних висновків та результатів дослідження.

З рисунку 2 можна також побачити, що рівняння (9), (10), (12) та (13) теж дуже добро описують ключові точки так званої «*f*-*S* діаграми». Слід зазначити, що розрахунки за рівнянням (12) та (13) виявилися однаковими, оскільки це пов'язано з умовами моделювання (значення $\alpha_ш = 1$, а середня крутильна жорсткість ($C_{x\text{ср}}$) була прийнята рівною C_x = 128,0 кН·м/рад при R_z = 25,5 кН та r_d = 0,5 м.

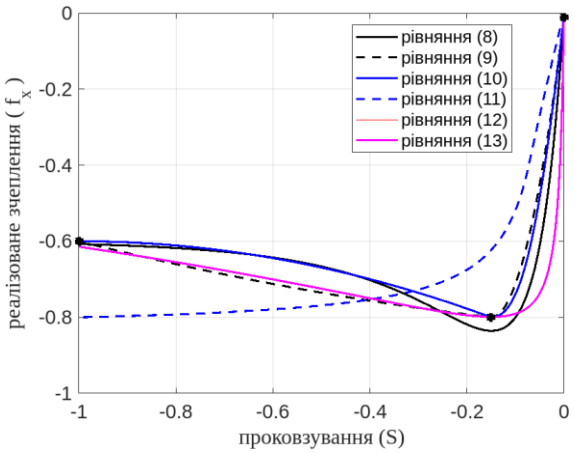

Рис. 2. Розрахунок реалізованого зчеплення за рівняннями (8) – (13) при позитивних значеннях f_0, f_{m1}, f_{b1}, S_{k1} зображених у від'ємних координатах *S* та f_x

В рівнянні (12), як і в рівнянні (13) значення кутів закручування шини ξ_m, ξ_b, ξ_0 були визначені за емпіричними рівняннями:

$$\xi_m \approx 0.26 \cdot f_b \cdot r_d ;$$
$$\xi_b \approx 0.2 \cdot f_b \cdot r_d ;$$
$$\xi_0 \approx 0.2 \cdot f_0 \cdot r_d .$$

Аналіз результатів моделювання за рівняння (8) показав, що вони близькі до ключових точок «*f*-*S* діаграми», тому це рівняння можна вважати умовно-придатним для моделювання характеру реалізації зчеплення між шиною та поверхнею дорожнього покриття в режимі гальмування колеса.

Рівняння (11), як можна побачити з рисунку 2 має велику похибку в усіх ключових точках «*f*-*S* діаграми», тому його використання є не доцільним, оскільки може призвести до таких самих наслідків, як і рівняння (2) та (5), результат розрахунку за якими зображено на рисунку 1.

Отже підводячи підсумки, щодо використання рівнянь (2) – (13) для моделювання реалізованого зчеплення шини автомобільного колеса з поверхнею дорожнього покриття в режимі гальмування колеса, можна констатувати, що не всі з цих рівнянь мають достатню точність розрахунків. Деякі з наведених рівнянь, а саме, рівняння (2), (5) та (11) можуть суттєво вплинути на висновки та результати моделювання, наприклад систем автоматичного регулювання гальмового зусилля, таких, як: антиблокувальна система, система курсової стійкості, система розподілу гальмового зусилля.

Виконаємо моделювання за рівняннями, що належать до другої групи. Для математичного рівняння (1) приймемо наступні параметри: $D_0 = f_{mi}$, C = 1,9, S_h = 0, $S_v = f_0$, а величини B_s та E визначимо з емпіричних рівнянь:

$$B_{si} \approx 12.5 - 25 \cdot S_{ki} ;$$

$$E_i \approx \sqrt[f_{mi}]{\left(\frac{f_{bi}}{f_{mi}}\right)^{f_{bi}}} .$$

Результати моделювання за математичним рівнянням (1), для прийнятих вище параметрів, представлені в графічному вигляді на рисунку 3.

Моделювання реалізованого зчеплення за рівняннями (14) та (15) також показало добру збіжність результатів моделювання із заданими ключовими точками «*f* - *S* діаграми»: [0, - f_0], [∓ S_{ki}, ∓ f_{mi}], [∓ 1, ∓ f_{bi}] (позначено зірочками на рисунку 3).

Слід зазначити, що оскільки для визначення параметрів *C, Bs, E* були використані значення отримані емпіричним шляхом точ-

ність розрахунків поблизу значень f_{bi} має похибку, але вона є незначною і нею можна знехтувати.

Аналізуючи результати моделювання реалізованого зчеплення за рівняннями (16) та (17) також можна відзначити, що вони дають достатньо високу точність співпадіння розрахованих значень зчеплення із ключовими точками «*f* - *S* діаграми». Порівнюючи між собою результати моделювання за повним рівнянням (16) та його спрощеним еквівалентним виглядом (17) можна зробити висновок про те, що спрощене рівняння (17) не уступає повному рівнянню (16) в точності визначення реалізованого зчеплення і може бути використано при моделювання взаємодії шини автомобільного колеса з поверхнею дорожнього покриття, як в тяговому так і гальмовому режимі його кочення.

При моделюванні за рівнянням (16) та рівнянням (17) були використані наступні значення коефіцієнтів: $k_1 = 5$, $k_2 = 1$, $k_4 = 2$.

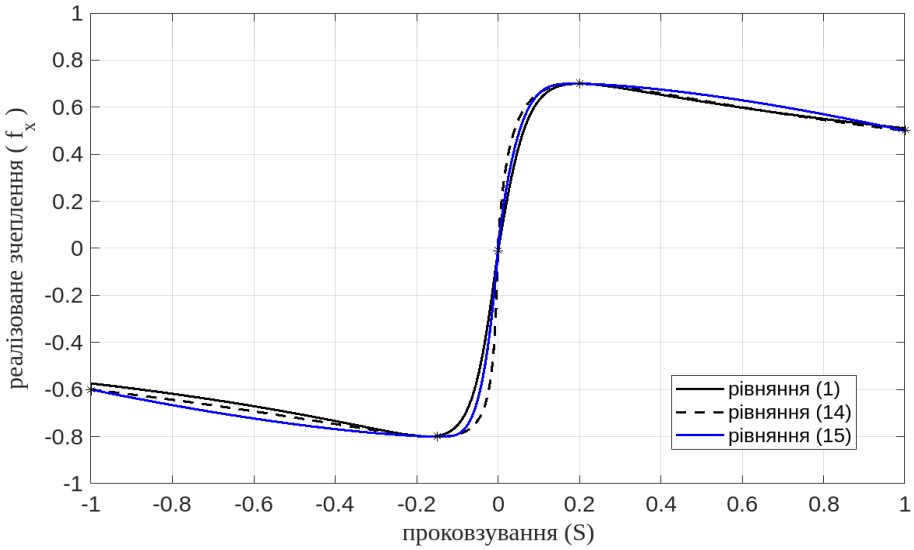

Рис. 3. Розрахунок реалізованого зчеплення за рівняннями (1), (14) та (15) коли $S \in [-1,1]$

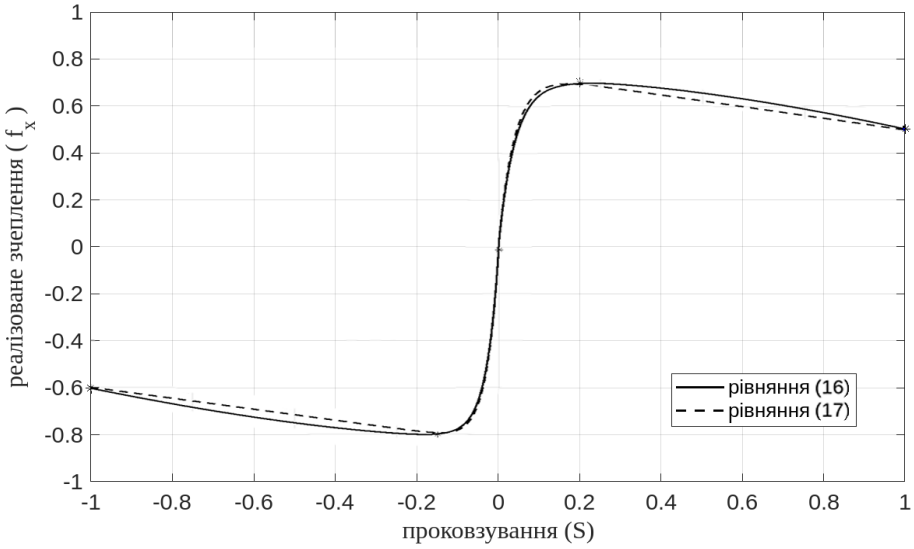

Рис. 4. Розрахунок реалізованого зчеплення за рівняннями (16) та (17) коли $S \in [-1,1]$

Висновки

Дослідження показують, що для моделювання реалізованого зчеплення шини автомобільного колеса з поверхнею дорожнього покриття існує декілька універсальних рівнянь, що дозволяють змоделювати повну «*f*–*S* діаграму» в усіх режимах кочення автомобільного колеса.

Найбільш універсальним рівнянням для моделювання повної «*f*–*S* діаграми» можна

вважати рівняння (17) або рівняння (1), якщо точністю блокування колеса, або точністю повного його буксування можна знехтувати.

Результати розрахунків за рівняннями (2), (5) та (11) мають значні похибки на окремих ділянках кривої «*f–S*», що обмежує їх практичне використання, особливо для моделювання роботи автоматизованих систем регулювання гальмового або тягового зусилля на колесах транспортного засобу.

Рівняння (3), (4), (6) – (10), (12), (13) добре підходять для моделювання характеру взаємодії шини автомобільного колеса з поверхнею дорожнього покриття в гальмовому режимі кочення колеса, але не підходять для моделювання повної «f–S діаграми» в діапазоні ковзання від мінус 1 до плюс 1, особливо поблизу значення 0, крім випадків, коли крива реалізованого зчеплення проходить через координати [0,0].

Більшість методів визначення реалізованого зчеплення потребує використання коефіцієнтів, що постійно змінюються (наприклад, таких як: Bs, E, Sk, fm, fb, тощо), які повинні підбиратися до конкретних умов та параметрів експлуатації шин. Похибка при їх визначенні може призводити до суттєвих помилок при моделюванні динаміки розгону або гальмування транспортного засобу.

Методи розрахунку реалізованого зчеплення (рівняння (11), (12), (13)), що засновані на жорсткісних властивостях шини, мають перспективи, але потребують удосконалення в частині правильності визначення кутів закручування та параметрів пружності пневматичної шини..

Рівняння (15), (16), (17) показали високу відповідність ключовим точкам «f–S діаграми» при використанні типових значень коефіцієнтів Sk, fm, fb. Особливо слід зазначити, що рівняння (17) є зручним для практичного використання завдяки своїй простоті без втрати точності моделювання.

Результати моделювання підтверджують доцільність групування рівнянь за режимами кочення. Проведене групування рівнянь на ті, що підходять лише для гальмового режиму, і ті, що універсальні, дозволило відокремити найбільш ефективні математичні моделі та полегшує вибір рівняння для конкретного завдання з розрахунку реалізованого зчеплення між шиною автомобільного колеса та поверхнею дорожнього покриття, яке ставиться перед науковцем або дослідником.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що немає конфлікту інтересів щодо публікації цієї статті.

Література

1. Feng, S., Zhao, Y., Deng, H., Wang, Q., & Chen, T. (2021). Parameter identification of Magic Formula tire model based on Fibonacci tree optimization algorithm. *Journal of Shanghai Jiaotong University (Science), 26*(5), 647–657. https://doi.org/10.1007/s12204-021-2354-9
2. Burckhardt, M. (1979). Erfahrungen bei der Konzeption und Entwicklung des Mercedes-Benz Bosch-Anti-Blockier-Systems (ABS). *Automobiltechnische Zeitschrift, 81*(5), 201–208.
3. Denny, M. (2005). The dynamics of antilock brake systems. *European Journal of Physics, 26*(6), 1007–1016. https://doi.org/10.1088/0143-0807/26/6/008 Grafiati
4. Kiencke, U., & Daiss, A. (1994). Estimation of tyre friction for enhanced ABS systems. In *Proceedings of the 2nd International Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC '94)* (pp. 515–520).
5. Canudas-de-Wit, C., Tsiotras, P., Velenis, E., Basset, M., & Gissinger, G. (2003). Dynamic friction models for road/tire longitudinal interaction. *Vehicle System Dynamics, 39*(3), 189–226. https://doi.org/10.1076/vesd.39.3.189.14152 Taylor & Francis Online
6. Michelin Technology Society. (1999). *The tyre. Grip*. Michelin.
7. Michelin Technology Society. (2001). *The tyre. Grip*. Michelin.
8. Han, K., Hwang, Y., Lee, E., & Choi, S. (2016). Robust estimation of maximum tire-road friction coefficient considering road surface irregularity. *International Journal of Automotive Technology, 17*(3), 415–425. https://doi.org/10.1007/s12239-016-0043-8
9. Леонтьєв, Д. М. (2011). *Системний підхід до створення автоматизованого гальмівного керування транспортних засобів категорій M_3 та N_3*. Харківський національний автомобільно-дорожний університет. Leontiev, D. M. (2011). Systemnyi pidkhid do stvorennia avtomatyzovanoho halmivnoho keruvannia transportnykh zasobiv katehorii M_3 ta N_3 [*A systematic approach to the creation of an automated brake control for vehicles of categories M_3 and N_3*]. Kharkiv National Automobile and Highway University [in Ukrainian]
10. Rill, G. (2009). *Vehicle Dynamics. Lecture notes*. Hochschule Regensburg University of Applied Sciences.
11. Dugoff, H., Fancher, P. S., and Segel, L. (1969). *Tire performance Characteristics Affecting Vehicle Response to Steering and Braking Control*

Inputs, Final Report for Contract No, CST-460, Office of Vehicle Systems Research, National Bureau of Standards, Washington.

12. Фролов, А. А. (2023). *Удосконалення методу визначення реалізованого зчеплення шин здвоєних коліс транспортного засобу в режимі гальмування*. Харківський національний автомобільно-дорожній університет. Frolov, A. A. (2023). Udoskonalennia metodu vyznachennia realizovanoho zcheplennia shyn zdvoienykh kolis transportnoho zasobu v rezhymi halmuvannia. [*Improvement of the method of determining the adhesion utilized of tires at dual wheels vehicle with the surface of the road pavement*] Kharkiv National Automobile and Highway University [in Ukrainian]
13. Klimenko, V., Kapski, D., Leontiev, D., Kuripka, O., & Frolov, A. (2021). Determination of tangential properties of a single pneumatic tire in the braking mode of a vehicle. *Vehicle and Electronics. Innovative Technologies*, *19*, 28–34. https://doi.org/10.30977/veit.2021.19.0.28 Veit Automotive and Electronics
14. Leontiev, D., & Don, E. (2016). Specifics of automobile dual wheels interaction with the supporting surface. *Automobile Transport*, *39*, 74–79. https://doi.org/10.30977/AT.2219-8342.2016.39.0.74 ResearchGate
15. Leontiev, D. N., Mikhalevich, N. G., & Frolov, A. A. (2018). Influence of vertical load on braking force and tyre adhesion coefficient of vehicle wheel. *Theory and Practice of Forensic Science and Criminalistics*, *18*, 383–392. https://doi.org/10.32353/khrife.2018.42 ResearchGate
16. Leontiev, D., Klymenko, V., Aloksa, M., & Sylchenko, M. (2022). Regarding the issue of determining the deceleration of a two-axle vehicle with a damaged brake system. *Automobile Transport*, *50*, 21–28. https://doi.org/10.30977/AT.2219-8342.2022.50.0.03 Academia
17. Maknickas, A., Ardatov, O., Bogdevičius, M., & Kačianauskas, R. (2022). Modelling the interaction between a laterally deflected car tyre and a road surface. *Applied Sciences*, *12*(22), 11332. https://doi.org/10.3390/app122211332 ResearchGate+1
18. Fathi, H., Khosravi, M., El-Sayegh, Z., & El-Gindy, M. (2023). An advancement in truck-tire–road interaction using the finite element analysis. *Mathematics*, *11*(11), 2462. https://doi.org/10.3390/math11112462 IDEAS/RePEc+1
19. Millan, P., & Ambrósio, J. (2024). Tire–road contact modelling for multibody simulations with regularised road and enhanced UA tire models. *Multibody System Dynamics*, *63*(3), 273–302. https://doi.org/10.1007/s11044-024-09987-z ResearchGate+1
20. Mantaras, D. A., Luque, P., & Alonso, M. (2022). Phase plane analysis applied to non-explicit multibody vehicle models. *Multibody System Dynamics*, *56*(2), 173–188. https://doi.org/10.1007/s11044-022-09846-9 ResearchGate+1
21. Guastadisegni, G., De Pinto, S., Cancelli, D., Labianca, S., Gonzalez, A., Gruber, P., & Sorniotti, A. (2024). Ride analysis tools for passenger cars: Objective and subjective evaluation techniques and correlation processes – A review. *Vehicle System Dynamics*, *62*(7), 1876–1902. https://doi.org/10.1080/00423114.2023.2259024 Taylor & Francis Online+1
22. Spiryagin, M., Edelmann, J., Klinger, F., & Cole, C. (2023). Vehicle system dynamics in digital twin studies in rail and road domains. *Vehicle System Dynamics*, *61*(7), 1737–1786. https://doi.org/10.1080/00423114.2023.2188228 Taylor & Francis Online+1
23. He, L., Pan, Y., He, Y., Li, Z., Królczyk, G., & Du, H. (2022). Control strategy for vibration suppression of a vehicle multibody system on a bumpy road. *Mechanism and Machine Theory*, *174*, 104891. https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2022.104891 ScienceDirect+1
24. Mantaras, D. A., Luque, P., & Alonso, M. (2022). Phase plane analysis applied to non-explicit multibody vehicle models. *Multibody System Dynamics*, *56*(2), 173–188. https://doi.org/10.1007/s11044-022-09846-9
25. Petrov, L. M., Kishianus, I. V., Petryk, Y. M., Nikishyn, V. A., & Sheluhin, S. V. (2023). Structural improvement of the wheel drive of a military vehicle. *Systems and Technologies*, *65*(1), 160–167. https://doi.org/10.32782/2521-6643-2023.1-65.20
26. Петров, Л. М., Кішянус, І. В., Петрик, Ю. М., & Фролов, О. С. (2022). Виявлення неврахованого впливу стиснутої шини на змінення значення коефіцієнта зчеплення шини колісного рушія з дорогою та прискорення колісного рушія. *Збірник наукових праць Військової академії*, *2*(18), 111–118. Vyiavlennia nevrakhovanoho vplyvu stysnotoi shýny na zminenennia znachennia koefitsiienta zcheplennia shýny kolisnoho rushiia z dorohoiu ta pryskorennia kolisnoho rushiia [Detection of the unaccounted influence of a compressed tire on changes in the adhesion coefficient of a wheel-drive tire with the road and the acceleration of the wheel drive] Zbirnyk naukovykh prats Viiskovoi akademii, 2(18), 111–118. https://doi.org/10.37129/2313-7509.2022.18.111–118 [in Ukrainian]

Леонтьєв Дмитро[1], д.т.н., професор кафедри автомобілів, leontiev@khadi.kharkov.ua,
тел.: +38 097 943-78-85,
ORCID: 0000-0003-4255-6317

Сметанін Герман[1], аспірант кафедри автомобілів ім. А. Б. Гредескула, smetanin.gv@gmail.com,
тел.: +38 063 950-35-35,
ORCID: 0000-0002-2275-6891

Володін Валерій[1,2], здобувач кафедри автомобілів, val.volod1@gmail.com,
тел.: +38 095 180-17-08,
ORCID: 0009-0004-0107-5618

Малий Віктор[1]**,** здобувач кафедри автомобілів ім. А.Б. Гредескула, victormaly@outlook.com,
тел.: +38 093 452-95-50,
ORCID: 0009-0002-7800-9163

Рябушенко Олександр[1], к.т.н., доцент кафедри організації та безпеки дорожнього руху, riabushenko79@ukr.net, тел.: +38 066 858-36-51
ORCID: 0000-0002-8415-5733

Товт Богдан[3]**,** к.т.н., доцент кафедри вищої математики, фізики та загальноінженерних дисциплін, btovtua@gmail.com,
тел.: +38 068 680-79-31,
ORCID: 0009-0000-7670-8898

[1]Харківський національний автомобільно-дорожній університет, 61002, Україна, м. Харків, вул. Ярослава Мудрого, 25.

[2]Комунальний заклад «Харківський ліцей № 154 Харківської міської ради» 61204, Україна, м. Харків, пр. Людвіга Свободи 42Б.

[3]Дніпровський державний аграрно-економічний університет, вул. Сергія Єфремова, 25, м. Дніпро, Україна, 49009.

Methods for Calculating Utilized Adhesion Between a Vehicle Tire and the Road Surface

Abstract. Problem. *Ensuring road traffic safety is impossible without accurate prediction of a vehicle's behavior under various operating conditions. Therefore, determining the actual adhesion between a tire and the road surface is a relevant and pressing issue for researchers and engineers. Modeling tire–road traction is particularly crucial for improving active safety systems such as ABS, ESP, and brake force distribution systems.* **Goal.** *The aim of this work is to analyze existing mathematical models of tire–road traction and to determine a method that enables high-accuracy modeling of traction across all rolling regimes of the vehicle wheel.* **Methodology.** *The study includes a review of relevant literature and mathematical models of tire–road adhesion (Pacejka, Burckhardt, Denny, Kiencke equations, stiffness-based models, etc.). Numerical modeling was performed using fixed values for key points of the "f–S diagram," and the accuracy of the results was compared across different models.* Results. *It was found that not all existing mathematical models of tire–road interaction can adequately simulate traction behavior over the full range of tire slip. Some models demonstrate high accuracy within specific wheel rolling modes, while others exhibit significant errors and limited applicability.* **Originality.** *This study systematizes the known methods for calculating actual tire–road adhesion, defines criteria for evaluating their effectiveness, and presents comprehensive simulations based on typical key tire parameters.* **Practical value.** *The results can be used in the design of pneumatic tires, optimization of active vehicle safety systems, and development of high-precision simulators for vehicle motion on various road surfaces.*

Key words: *utilized adhesion; adhesion coefficient; tire; vehicle wheel; road surface.*

Leontiev Dmytro[1]**,** professor, Doct. of Science, Automobiles named after A. B. Gredeskul, leontiev@khadi.kharkov.ua, +38 097 943-78-85,
ORCID: 0000-0003-4255-6317

Smetanin German[1], PhD student Departament of Automobiles named after A. B. Gredeskul, smetanin.gv@gmail.com, +38 063 950-35-35,
ORCID: 0000-0002-2275-6891

Volodin Valerii[1,2], student, Departament of Automobiles named after A. B. Gredeskul, +38 095 180-17-08, val.volod1@gmail.com,
ORCID: 0009-0004-0107-5618

Malyi Viktor[1]**,** PhD Student of the Department of Automobiles, +38 093 452-95-50, victormaly@outlook.com,
ORCID: 0009-0002-7800-9163

Riabushenko Oleksandr[1], C.Sc. (Eng), Associate Professor of the Department of road traffic management and safety, +38 066 858-36-51 riabushenko79@ukr.net,
ORCID: 0000-0002-8415-5733

Tovt Bohdan[3]**,** C.Sc., Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Physics and General Engineering, +38 068 680-79-31, btovtua@gmail.com,
ORCID: 0009-0000-7670-8898

[1]Kharkov National Automobile and Highway University, 25, Yaroslava Mudrogo str., Kharkiv, 61002, Ukraine.
[2]Municipal institution "Kharkiv Lyceum 154 of the Kharkiv City Council" 42B, Ludviga Svobody Ave., Kharkiv, 61204, Ukraine.

[3]Dnipro State Agrarian and Economic University, 25, Serhii Efremov str., Dnipro, 49009, Ukraine.