

Кінематика шарніра Гука

Подригало М. А.¹, Перегон В. А.¹, Бобошко О. А.¹, Богдан Д. І.¹, Коряк О. О.¹

¹Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. Робота присвячена дослідженню кінематики шарніра Гука. Головна увага приділена визначенню кінематичних характеристик хрестовини в її абсолютному та відносному рухах. Дані кінематичні характеристики є фундаментом для дослідження динаміки карданної передачі; використовуються при дослідженні роботи підшипників хрестовини карданного шарніра. Виконане дослідження кінематики карданного шарніра дозволило виявити й усунути неоднозначності у визначенні відносних кутових швидкостей елементів кінематичних пар хрестовини і карданних вилок. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні і дослідженні моторно-трансмійсійних установок, до складу яких входить шарнір Гука.

Ключові слова: шарнір Гука, хрестовина, карданна вилка, кутова швидкість, сферичний рух.

Вступ

Шарнір Гука використовується для передачі обертового руху в приводах різноманітних механізмів, вали яких розташовані під деяким кутом, а також, якщо міжосьовий кут передачі α змінюється в процесі роботи.

Одинарний шарнір Гука застосовується порівняно рідко, оскільки викликає нерівномірність обертання веденого вала, яка різко збільшується зі збільшенням кута між валами. Тому він використовується в пристроях, які допускають деяку нерівномірність обертання, переважно в тихохідних механізмах при невеликих значеннях кута α . У відповідальних швидкохідних механізмах використовують подвійний шарнір Гука, який дозволяє усунути зазначену нерівномірність обертання.

Аналіз публікацій

Дослідженню та конструюванню шарнірів нерівних кутових швидкостей присвячена значна кількість робіт. В них розглядаються питання, пов'язані зі структурою, геометричними і кінематичними параметрами універсального шарніра [1-4], присвячені дослідженню його динаміки [4-13], надійності [13, 14], а також питання, які орієнтовані на конструювання та розрахунок карданних передач [15, 16]. Незважаючи на різну направленість робіт, практично кожне дослідження шарніра передбачає кінематичний аналіз і ґрунтується

на його результатах.

В роботі [1] розглядаються питання, які пов'язані зі структурою, геометричними і кінематичними параметрами універсального шарніра Гука. Досліджується також подвійний карданний шарнір з метою оцінки впливу параметрів проміжного вала на динамічні показники передачі. В роботі представлені залежності, які пов'язують кути, кутові швидкості та кутові прискорення вхідного та вихідного валів. Проте, в даному дослідженні не розглядалися кінематичні характеристики руху хрестовини шарніра.

Робота [5] присвячена силовому аналізу подвійного шарніра. Автори поєднували теоретичні дослідження з комп'ютерним моделюванням в програмному середовищі ADAMS. Кінематичний аналіз шарніра не був пріоритетним питанням, а тому кінематичні характеристики руху хрестовини залишилися поза увагою дослідників.

В роботах [6-8] досліджуються вібраційні характеристики карданних валів. Автори зазначених робіт застосовували різні методи для вирішення поставленої задачі. Дослідження в [6] має суто теоретичний характер, дослідники в [7] поєднували теоретичний та експериментальний підходи, а в [8] віддавалася перевага експериментальному методу. Що стосується кінематичної складової зазначених досліджень, то вона обмежувалась розглядом лише тих кінематичних залежностей, які були необхідні для вирішення основ-

ної задачі.

Будова і кінематика шарніра Гука розглядаються практично в кожному підручнику з теорії механізмів і машин, серед яких слід відзначити [2, 3], де кінематичний аналіз представлений найбільш повно. Але, порівнюючи певні розрахункові залежності з подібними, наданими в інших джерелах, можна зіткнутися з їх неоднозначністю. Так, наприклад, в [2] розрахункова залежність для визначення величини відносної кутової швидкості ω_{21} хрестовини 2 відносно вхідної ланки 1 має вигляд:

$$\omega_{21}^{[2]} = \omega_1 \frac{\cos \alpha \sin \alpha \sin \varphi_1}{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1}, \quad (1)$$

де ω_1 – кутова швидкість вхідного вала; α – кут між осями валів (див. рис. 1); φ_1 – кут повороту вхідного вала.

Зазначимо, що в [2] не представлена залежність для визначення величини відносної кутової швидкості ω_{32} вихідної ланки 3 відносно хрестовини 2.

В [3] запропоновані наступні формули для визначення величин відносних кутових швидкостей:

$$\omega_{21}^{[3]} = \omega_1 \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi_1}; \quad (2)$$

$$\omega_{32}^{[3]} = \omega_1 \frac{\operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi_1}, \quad (3)$$

які, з метою порівняння з (1), можна перетворити й представити у вигляді:

$$\omega_{21}^{[3]} = \omega_1 \frac{\cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi_1}{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1}; \quad (4)$$

$$\omega_{32}^{[3]} = \omega_1 \frac{\cos \alpha \sin \alpha \sin \varphi_1}{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1}. \quad (5)$$

Треба мати на увазі, що в [2] відлік кута повороту ланки 1 здійснюється від положення, у якому його карданна вилка знаходиться в площині, перпендикулярній осьовій площині вхідної й вихідної ланок, а в [3] у початковому положенні площина карданної вилки ланки 1 збігається з осьовою площиною. Отже, у джерелах [2] і [3] розрахункові зале-

жності для визначення ω_{21} ідентичні, оскільки $\sin(\pi/2 \pm x) = \cos(\pm x)$.

В [4] формула для визначення ω_{21} така ж, що й у джерелах [2] і [3], а величина ω_{32} визначається за наступною залежністю:

$$\omega_{32}^{[4]} = \omega_1 \frac{\operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi_1}}, \quad (6)$$

яка відрізняється від виразу (3) тим, що знаменник знаходиться під знаком квадратного кореня.

Очевидно, що розрахункові залежності для визначення ω_{32} , представлені в розглянутих джерелах, неоднозначні й вимагають уточнення. Також відзначимо, що в [10] розрахункова залежність для визначення ω_{21} збігається з тими, що представлені в джерелах [2, 3, 4], але відсутня формула для визначення ω_{32} .

Крім того, в роботах недостатньо висвітлені питання, які стосуються визначення відносних кутів повороту в кінематичних парах хрестовин і карданних вилок, що визначає роботу сил тертя в даних з'єднаннях, а також коефіцієнт корисної дії (ККД) передачі. Літературний аналіз також показав, що, як правило, при дослідженні роботи карданних передач поза увагою залишається прискорення хрестовини в її абсолютному та відносному рухах, оскільки зазвичай нехтують її інерційними параметрами [9]. Такий підхід цілком виправданий, зважаючи на незначну масу хрестовини, але при точних розрахунках високошвидкісних карданних передач слід враховувати інерційні параметри хрестовини.

Мета та постановка задачі

Виходячи з аналізу публікацій, метою даної роботи є визначення кінематичних характеристик хрестовини в її абсолютному та відносному рухах. Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати наступні задачі:

- отримати розрахункові співвідношення для визначення величин відносних кутових швидкостей в кінематичних парах хрестовини і карданних вилок;
- встановити функціональні залежності відносних кутів повороту ланок в кінематичних парах хрестовини і карданних вилок;
- визначити кутове прискорення хрестовини шарніра Гука;
- оцінити вплив міжосьового кута передачі на її кінематичні характеристики.

Кінематичний аналіз універсального шарніра Гюка

Розглянемо одинарний шарнір Гюка, схема якого представлена на рис. 1. Вали 1 (вхідний) і 3 (вихідний), а також нерухомо пов'язані з ними карданні вилки, здійснюють прості обертальні рухи. Вектори кутових швидкостей ланок 1 і 3 на схемі позначені $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_3$ відповідно. Кут між зазначеними векторами (міжосьовий кут передачі) позначений α .

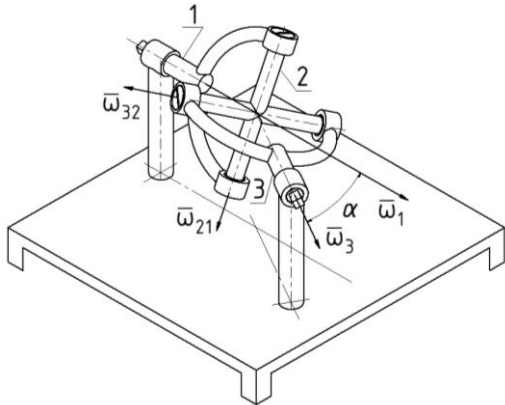


Рис. 1. Схема шарніра Гюка

У випадку $\alpha \neq 0$, хрестовина 2 здійснює сферичний рух навколо нерухомої точки, розташованої в її центрі. Вектори відносних кутових швидкостей хрестовини 2 відносно ланки 1, а також ланки 3 відносно хрестовини позначені відповідно $\vec{\omega}_{21}$ і $\vec{\omega}_{32}$. На підставі теореми про складний обертальний рух можемо записати векторне рівняння

$$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{32}. \quad (7)$$

На рис. 2 представлена розрахункова схема. Системи координат $Ox_1y_1z_1$ і $Ox_3y_3z_3$, які пов'язані з ланками 1 і 3, мають загальний початок координат (т. O), розташований в центрі хрестовини. Вектори кутових швидкостей в абсолютному і відносному рухах зображені у вигляді відповідних відрізків в деякому масштабі μ_ω .

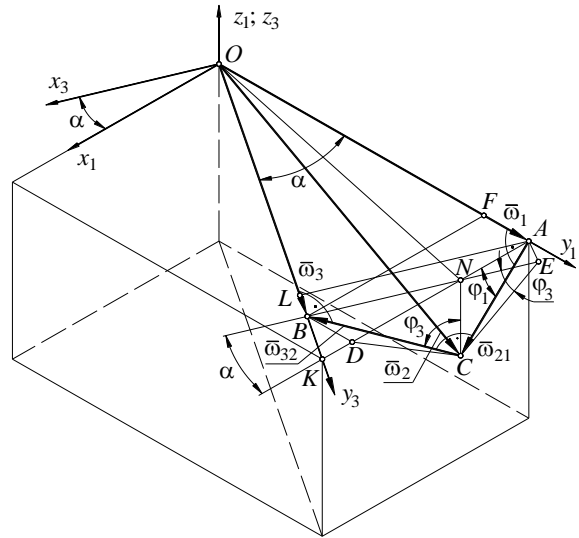


Рис. 2. Розрахункова схема

Вектор $\vec{\omega}_{21}$ лежить у площині, паралельній координатній площині x_1Oz_1 і містить точки A, C, D . Вектор $\vec{\omega}_{32}$ лежить у площині, яка паралельна координатній площині x_3Oz_3 і містить точки B, C, E . Кут між зазначеними площинами дорівнює α , а лінія їх перетину містить відрізок CN . Очевидно, що $\vec{\omega}_{21} \perp \vec{\omega}_1$; $\vec{\omega}_{32} \perp \vec{\omega}_{21}$; $\vec{\omega}_3 \perp \vec{\omega}_{32}$.

Умовимося відраховувати кут повороту ланки 1 від початкового положення, у якому карданна вилка шарніра (і вектор $\vec{\omega}_{21}$) знаходиться в площині, яка містить осі валів універсального шарніра. У цьому випадку поточний кут повороту ланки 1 $\phi_1 = \angle SAN$.

При повороті ланки 1 на кут ϕ_1 , ланка 3 повернеться на кут, обумовлений кутом повороту вектора $\vec{\omega}_{32}$ від початкового положення, у якому він паралельний осі Oz_3 , до поточного положення, тобто $\phi_3 = \angle BSN$.

Спроекуємо прямокутний трикутник $\triangle ACN$ із прямим кутом при вершині N на площину, у якій лежить вектор $\vec{\omega}_{32}$. У результаті одержимо прямокутний трикутник $\triangle ECN$, який має спільний з вихідним трикутником катет CN . Довжина другого катета:

$$EN = AN \cos \alpha. \quad (8)$$

Оскільки $\vec{\omega}_{32} \perp \vec{\omega}_{21}$, тобто $\angle ACB = \pi/2$, а сторона BC прямого кута лежить у площині проєкції, то $\angle ECB = \pi/2$. Отже, у прямокутному трикутнику $\triangle ECN$ кут $\angle CEN = \phi_3$.

Довжина спільного катета прямокутних трикутників $\triangle ACN$ і $\triangle ECN$:

$$CN = AN \operatorname{tg} \varphi_1 = EN \operatorname{tg} \varphi_3. \quad (9)$$

З рівнянь (8) і (9) одержимо відому залежність, яка пов'язує кути повороту вхідного й вихідного валів:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_3 \cos \alpha. \quad (10)$$

Після диференціювання за часом обох частин рівняння (10) і виконання тригонометричних перетворень, одержимо залежність, яка пов'язує кутові швидкості вхідного й вихідного валів:

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1}. \quad (11)$$

Спроекуємо прямокутний трикутник ΔBCN із прямим кутом при вершині N на площину, у якій лежить вектор $\vec{\omega}_{21}$. У результаті одержимо прямокутний трикутник ΔDCN , який має спільний із трикутником ΔBCN катет CN . Оскільки сторона AC прямого кута $\angle ACB$ ($\vec{\omega}_{32} \perp \vec{\omega}_{21}$) паралельна площині проєкції, утворився ще один прямокутний трикутник ΔACD із прямим кутом при вершині C . В цьому трикутнику:

$$\cos \varphi_1 = \frac{AC}{AD}. \quad (12)$$

Оскільки відрізок $AD = BF$, який являє собою катет у прямокутному трикутнику ΔOFB , то (12) набуде вигляду:

$$\cos \varphi_1 = \frac{AC}{OB \sin \alpha} = \frac{\omega_{21}}{\omega_3 \sin \alpha}, \quad (13)$$

З виразу (13) отримаємо:

$$\omega_{21} = \omega_3 \sin \alpha \cos \varphi_1. \quad (14)$$

Враховуючи формулу (11), остаточно отримаємо:

$$\omega_{21} = \omega_1 \frac{\cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi_1}{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1}. \quad (15)$$

Рівняння (15) ідентичне рівнянням для визначення ω_{21} , представленим в [2-4, 10].

Визначимо величину вектора $\vec{\omega}_{32}$. У прямокутному трикутнику ΔOAL , враховуючи, що $AL = EB$:

$$\sin \alpha = \frac{AL}{OA} = \frac{EB}{OA}. \quad (16)$$

Розглянемо прямокутний трикутник ΔBCE , у якому сторона CB є катетом, протилежним куту $\angle CEB = \varphi_3$. З урахуванням (16), запишемо:

$$\sin \varphi_3 = \frac{CB}{EB} = \frac{CB}{OA \sin \alpha} = \frac{\omega_{32}}{\omega_1 \sin \alpha}. \quad (17)$$

З (10) знайдемо:

$$\sin \varphi_3 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_3}{\cos \alpha}. \quad (18)$$

Тоді, враховуючи (17) і (18) отримаємо:

$$\omega_{32} = \omega_1 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_3. \quad (19)$$

Розглянемо прямокутні трикутники ΔACN і ΔBCN . Довжина загального катета даних трикутників:

$$CN = AC \sin \varphi_1 = CB \cos \varphi_3. \quad (20)$$

З виразу (20) отримаємо:

$$\cos \varphi_3 = \frac{AC}{CB} \sin \varphi_1 = \frac{\omega_{21}}{\omega_{32}} \sin \varphi_1. \quad (21)$$

Підставивши (21) в (19) і прийнявши до уваги (15), одержимо:

$$\begin{aligned} \omega_{32}^2 &= \omega_1 \omega_{21} \operatorname{tg} \alpha \frac{\sin^2 \varphi_1}{\cos \varphi_1} = \\ &= \omega_1^2 \frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi_1}{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1}. \end{aligned} \quad (22)$$

З рівняння (22) знаходимо величину відносної кутової швидкості:

$$\omega_{32} = \omega_1 \frac{\sin \alpha \sin \varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1}}. \quad (23)$$

Оскільки при літературному аналізі

з'ясувалася неоднозначність формул для визначення саме ω_{32} , отримаємо залежність (23) іншим шляхом. Для цього спершу визначимо абсолютну кутову швидкість хрестовини. Оскільки:

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21}, \quad (24)$$

а $\bar{\omega}_{21} \perp \bar{\omega}_1$, то, враховуючи (15), величина абсолютної кутової швидкості хрестовини 2 буде дорівнювати:

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_{21}^2} = \omega_1 \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1 (1 + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi_1)}}{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1}. \quad (25)$$

Як впливає з (7) і (24):

$$\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_{32}, \quad (26)$$

а $\bar{\omega}_{32} \perp \bar{\omega}_3$, то, беручи до уваги (11) і (25), величина відносної кутової швидкості:

$$\omega_{32} = \sqrt{\omega_2^2 - \omega_3^2} = \omega_1 \frac{\sin \alpha \sin \varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1}}. \quad (27)$$

Як бачимо, праві частини рівнянь (23) і (27) співпадають. Зазначимо, що праві частини вказаних рівнянь являють собою лише іншу форму запису правої частини рівняння (6), яке представлено в [4].

На рис. 3 показані графіки залежностей $\omega_{21}/\omega_1=f_1(\varphi_1)$ і $\omega_{32}/\omega_1=f_2(\varphi_1)$, побудованих з використанням формул (15) і (23), для двох значень міжосьового кута передачі: $\alpha=30^\circ$ і $\alpha=60^\circ$.

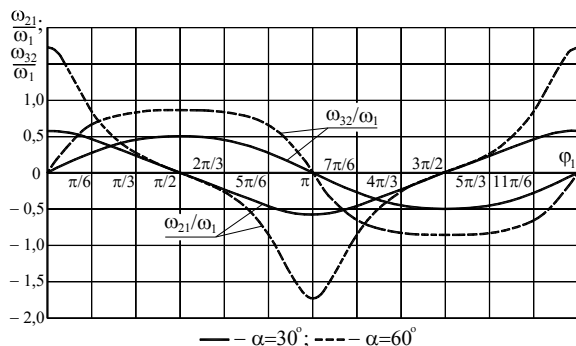


Рис. 3. Графіки залежностей $\omega_{21}/\omega_1=f_1(\varphi_1)$ і $\omega_{32}/\omega_1=f_2(\varphi_1)$

Значення $\alpha=60^\circ$, яке далеко виходить за область практичного застосування одинарно-

го шарніра Гука, було використано для більш наочної демонстрації амплітуд зазначених графіків. Очевидно, що функції $\omega_{21}=\omega_{21}(\varphi_1)$ і $\omega_{32}=\omega_{32}(\varphi_1)$ є періодичними з періодом 2π за умов: $\omega_1=\text{const}$; $\alpha \neq 0$; $\alpha=\text{const}$. Із залежностей (15), (23) і (25) отримаємо екстремальні значення відносних кутових швидкостей у рухомих з'єднаннях хрестовини і карданних вилок та абсолютної кутової швидкості хрестовини. При $\varphi_1=0$ максимальне значення кутової швидкості хрестовини відносно карданної вилки вхідного вала $\omega_{21\text{max}} = \omega_1 \tan \alpha$, максимальне значення абсолютної кутової швидкості хрестовини $\omega_{2\text{max}} = \omega_1 / \cos \alpha$, а кутова швидкість карданної вилки вихідного вала відносно хрестовини $\omega_{32}=0$. При $\varphi_1=\pi/2$ отримаємо: $\omega_{21}=0$; $\omega_{2\text{min}} = \omega_1$, а $\omega_{32\text{max}} = \omega_1 \sin \alpha$. Таким чином, відношення максимальних значень відносних швидкостей

$$\frac{\omega_{32\text{max}}}{\omega_{21\text{max}}} = \cos \alpha. \quad (28)$$

Отже, абсолютні максимальні значення відносної кутової швидкості ланок у кінематичних парах хрестовини й карданної вилки вхідного вала більші, ніж у кінематичних парах хрестовини й карданної вилки вихідного вала. Вказана різниця між абсолютними максимальними значеннями відносних кутових швидкостей різко збільшується зі збільшення міжосьового кута передачі. Але при малих кутах α , які мають місце в практиці використання одинарного карданного шарніра, відмінністю в амплітудах функцій $\omega_{21}=\omega_{21}(\varphi_1)$ і $\omega_{32}=\omega_{32}(\varphi_1)$ можна знехтувати.

Визначимо відносні кути повороту φ_{21} і φ_{32} у з'єднаннях хрестовини 2 і карданних вилок вхідного 1 і вихідного 3 валів. Прийmemo, що відносний кут повороту ланок у з'єднанні хрестовини з карданноювилкою дорівнює нулю тоді, коли вісь даної обертальної кінематичної пари знаходиться в площині, яка містить осі валів карданної передачі. При такому виборі нульового відносного положення ланок значення зазначених кутів у процесі роботи шарніра Гука знаходяться у межах від $-\alpha$ до α .

Розглянемо рухоме з'єднання карданної вилки вхідного вала 1 із хрестовиною 2. Оскільки $\omega_1 = d\varphi_1 / dt$, а $\omega_{21} = d\varphi_{21} / dt$, то, помноживши обидві частини рівняння (15)

на dt , одержимо диференціальне рівняння з відокремленими змінними. Частковий розв'язок, який задовольняє початковим умовам, можна відразу одержати, скориставшись визначеними інтегралами.

У початковому положенні вхідного вала, тобто при $\varphi_1=0$, його карданна вилка лежить у площині, у якій лежать осі валів карданної передачі. Тому, як було сказано вище, при $\varphi_1=0$ маємо $\varphi_{21}=0$ (нижні межі інтегрування). Отже:

$$\int_0^{\varphi_{21}} d\varphi_{21} = \int_0^{\varphi_1} \frac{\cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi_1}{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1} d\varphi_1. \quad (29)$$

Знайдемо первісну функції, яка знаходиться під знаком інтеграла в правій частині рівняння (29), враховуючи, що $\alpha = \text{const}$. Для цього скористаємося рівністю $\cos^2 \varphi_1 = 1 - \sin^2 \varphi_1$ й зробимо заміну змінної. У результаті підстановки: $u = \sin \alpha \sin \varphi_1$; $du = \sin \alpha \cos \varphi_1 d\varphi_1$, одержимо [17]:

$$\int \frac{du}{u^2 + k^2} = \frac{1}{k} \text{arctg} \left(\frac{u}{k} \right) + c. \quad (30)$$

де $k = \cos \alpha$; c – постійна інтегрування.

Повертаючись до змінної φ_1 , знаходимо:

$$\begin{aligned} \varphi_{21} &= \text{arctg}(\text{tg } \alpha \sin \varphi_1) \Big|_0^{\varphi_1} = \\ &= \text{arctg}(\text{tg } \alpha \sin \varphi_1). \end{aligned} \quad (31)$$

Таким чином, залежність $\varphi_{21}=\varphi_{21}(\varphi_1)$ має вигляд:

$$\varphi_{21} = \text{arctg}(\text{tg } \alpha \sin \varphi_1). \quad (32)$$

Розглянемо рухоме з'єднання хрестовини 2 з карданною вилкою вихідного вала 3. Помножимо обидві частини рівняння (23) на dt і проінтегруємо отримане диференціальне рівняння. Згідно (23), у проміжку $0 < \varphi_1 < \pi$ $\omega_{32} > 0$. Отже, у цьому проміжку $d\varphi_{32}/d\varphi_1 > 0$, а функція $\varphi_{32}=\varphi_{32}(\varphi_1)$ монотонно зростає. Таким чином, при $\varphi_1=0$ маємо $\varphi_{32} = -\alpha$ (нижні межі інтегрування). Інтегруючи, запишемо:

$$\int_{-\alpha}^{\varphi_{32}} d\varphi_{32} = \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin \alpha \sin \varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1}} d\varphi_1. \quad (33)$$

Для знаходження первісної функції, яка знаходиться під знаком інтеграла в правій частині рівняння (33), скористаємося підстановкою: $u = \sin \alpha \cos \varphi_1$; $du = -\sin \alpha \sin \varphi_1 d\varphi_1$. В результаті, враховуючи знак du , отримуємо [17]:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arccos u + c, \quad (34)$$

де c – постійна інтегрування.

Повертаючись до змінної φ_1 , одержимо:

$$\begin{aligned} \varphi_{32} + \alpha &= \arccos(\sin \alpha \cos \varphi_1) \Big|_0^{\varphi_1} = \\ &= \arccos(\sin \alpha \cos \varphi_1) - \\ &- \arccos \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) = \\ &= \arccos(\sin \alpha \cos \varphi_1) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Отже, залежність $\varphi_{32}=\varphi_{32}(\varphi_1)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_{32} &= -\frac{\pi}{2} + \arccos(\sin \alpha \cos \varphi_1) = \\ &= -\arcsin(\sin \alpha \cos \varphi_1). \end{aligned} \quad (36)$$

На рис. 4 показані графіки залежностей $\varphi_{21}=\varphi_{21}(\varphi_1)$ і $\varphi_{32}=\varphi_{32}(\varphi_1)$ для двох значень міжосового кута передачі: $\alpha=30^\circ$ і $\alpha=60^\circ$.

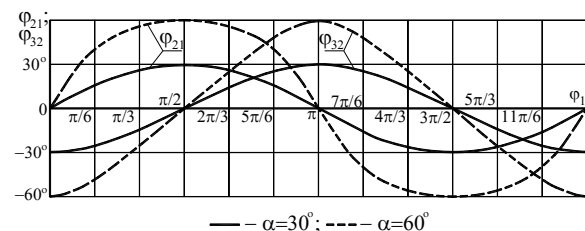


Рис. 4. Графіки залежностей $\varphi_{21}=\varphi_{21}(\varphi_1)$ і $\varphi_{32}=\varphi_{32}(\varphi_1)$

Як впливає з порівняння залежностей (31) і (36) та графіків на рис. 4, при невеликих кутах α , які складають область практичного застосування одинарного шарніра Гука, визначальна відмінність функцій $\varphi_{21}=\varphi_{21}(\varphi_1)$ і $\varphi_{32}=\varphi_{32}(\varphi_1)$ полягає лише в зміщенні другого

графіка відносно першого на кут $\pi/2$ уздовж осі φ_1 .

Для визначення кутового прискорення хрестовини скористаємося теоремою про додавання кутових прискорень твердого тіла, яке обертається навколо двох непаралельних осей [18]. Вважатимемо, що складний обертальний рух хрестовини складається з її переносного руху з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_1$ і відносного руху з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_{21}$. В цьому разі вектор $\bar{\varepsilon}_2$ абсолютного кутового прискорення хрестовини 2 дорівнює геометричній сумі її переносного, відносного і поворотного прискорень. Остання складова прискорення хрестовини (вектор поворотного прискорення) дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості її переносного обертального руху на вектор кутової швидкості її відносного обертального руху. Таким чином:

$$\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_{21} + (\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_{21}), \quad (37)$$

де $\bar{\varepsilon}_1$ – вектор переносного кутового прискорення хрестовини 2 (іншими словами – вектор кутового прискорення карданної вилки вхідного вала). За умови постійної кутової швидкості вхідної ланки 1 ($\bar{\omega}_1 = \text{const}$) $\bar{\varepsilon}_1 = 0$; $\bar{\varepsilon}_{21}$ – вектор відносного кутового прискорення хрестовини 2 відносно карданної вилки вхідного вала.

Знайдемо величину кутового прискорення хрестовини 2 відносно карданної вилки вхідного вала ε_{21} . Враховуючи (15), отримаємо:

$$\varepsilon_{21} = \frac{d\omega_{21}}{dt} = -\omega_1^2 \cos \alpha \sin \alpha \sin \varphi_1 \times \frac{1 + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1}{(1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1)^2}. \quad (38)$$

Визначимо величину вектора абсолютного кутового прискорення хрестовини. Оскільки $\bar{\varepsilon}_1 = 0$; $\bar{\omega}_1 \perp \bar{\omega}_{21}$; $\bar{\varepsilon}_{21} \perp (\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_{21})$, то, враховуючи (15), (37) і (38), отримаємо після перетворень:

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_{21}^2 + \omega_1^2 \omega_{21}^2} = \frac{\omega_1^2 \cos \alpha \sin \alpha}{(1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1)^2} \times [1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1 (2 \cos 2\varphi_1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi_1)]^{\frac{1}{2}}. \quad (39)$$

Аналіз виразу (39) показує, що кутове прискорення хрестовини є періодичною, з періодом π , функцією кута повороту вхідної ланки φ_1 . Таким чином, при роботі шарніра Гука хрестовина створює незначні періодичні динамічні навантаження, що слід враховувати при точних розрахунках високошвидкісних карданних передач.

Висновки

Проведений кінематичний аналіз універсального шарніра Гука дозволив виявити й усунути неоднозначності у визначенні відносної кутової швидкості елементів кінематичних пар хрестовини й карданної вилки вихідного вала.

Отримані функціональні залежності відносних кутів повороту ланок у кінематичних парах хрестовини і карданних вилок.

При невеликих кутах α , які складають область практичного застосування одинарного шарніра Гука, різницею в амплітудах функцій $\omega_{21} = \omega_{21}(\varphi_1)$ і $\omega_{32} = \omega_{32}(\varphi_1)$ можна знехтувати, а визначальна відмінність функцій $\varphi_{21} = \varphi_{21}(\varphi_1)$ і $\varphi_{32} = \varphi_{32}(\varphi_1)$ полягає лише в зміщенні другого графіка відносно першого на кут $\pi/2$ вздовж осі φ_1 .

Визначено кутове прискорення хрестовини в її абсолютному та відносному рухах. Показано, що кутове прискорення хрестовини є періодичною функцією кута повороту вхідної ланки. При роботі шарніра хрестовина створює незначні періодичні динамічні навантаження, що слід враховувати при точних розрахунках високошвидкісних карданних передач.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що немає конфлікту інтересів щодо публікації цієї статті.

Література

1. Florian Ion Tiberiu Petrescu, Rely Victoria Virgil Petrescu. (2019). The structure, geometry and kinematic of a universal joint. Independent Journal of Management and Production. V. 10, n. 8 Special Edition, pp. 1713-1724.
2. Фролов, К. В. Попов, С. А., Мусатов, А. К., Тимофеев, Г. А., Никоноров, В. А. (2004). Теория механизмов и машин. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 664 с. Frolov, K. V. Popov, S. A., Musatov, A. K., Timofeev, G. A., Nikonorov, V. A. Teoriya mehanizmov i mashin. [Theory Mechanism and Machines]. M.: MGTU im. N. E. Bauman, 664 s.

3. Заблонский, К. И., Белоконев, И. М., Щекин, В. М. (1989). Теория механизмов и машин: Киев: Высшая школа, 376 с. Zablonskiy, K. I., Belokonev, I. M., Schekin, V. M. Teoriya mehanizmov i mashin. [Theory Mechanism and Machines]. Kiev: Vysshaya shkola, 376 s.
4. Кожевников, С. Н., Перфильев, П. Д. (1978). Карданные передачи. Киев: Техника, 263 с. Kozhevnikov, S. N., Perfiliev, P. D. (1978). Kardannye peredachi. [Cardan transmissions]. Kiev: Tehnika, 263 s.
5. Gang Wang, Zhaohui Qi. (2018). Approximate determination of the joint reaction forces in the drive system with double universal joints. Journal of Mechanical Engineering and Science, Vol. 232(7) pp. 1191-1207.
6. Alfayo A. Alugongo. (2018) Parametric Vibration of a Cardan Shaft and Sensitivity Analysis. Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science. Vol II WCECS 2018, October 23-25, 2018, San Francisco, USA.
7. Yuanfeng Xia, Jian Pang, Liang Yang, Qin Zhao and Xianwu Yang. (2019). Nonlinear numerical and experimental study on the second-order torsional and lateral vibration of driveline system connected by cardan joint. Journal of Vibration and Control, 26(7-8), pp 540-551.
8. Reza Golafshan, Catalin Dascalu, Georg Jacobs, David Roth, Joerg Berroth, Stephan Neumann. (2021). Damage Diagnosis of Cardan Shafts in Mobile Mining Machines using Vibration Analysis. 19th Drive Train Technology Conference (ATK 2021). IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 1097 (2021) 012019.
9. Changlin Feng, Deshi Wang and Yongyong Zhu. (2012). Analysis of moment transmitted by universal joint in varying operating condition. Advanced Engineering Forum, Vols. 2-3, pp. 999-1003.
10. Slaviša Šalinić, Aleksandar Vranić, Nikola D. Nesic, Aleksandar M. Tomović. (2017). On the Torque Transmission by a Cardan-Hooke Joint. FME Transaction, 45(1), pp 117-121.
11. Bulut, G., Porlar, Z. (2011). Dynamic stability of a shaft system connected through a Hooke's joint Mechanism and Machines Theory. V.46, №11, P. 1689-1695.
12. Rakić, B., et al. (2013) The influence of variation in position of output shaft to load on the Cardan joint cross shaft. Mobility & Vehicle Mechanics, Vol. 39, No. 1, pp. 53-64.
13. Farzad Vesal, Mohammad Kashfi, Mohammad Ali Rezvani. (2012). Dynamics of universal joints, its failures and some propositions for practically improving its performance and life expectancy. Journal of Mechanical Science and Technology. August 2012, 26(8) pp. 2439-2449.
14. Aleksandar Asonja, Eleonora Desnica. (2015). Reliability of agriculture universal joint shafts based on temperature measuring in universal joint bearing assemblies. Spanish Journal of Agricultural Research, 13(1), e02-001, 8 pages.
15. Малаховский, Я. Э., Лапин, А. А. (1962). Карданные передачи. М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 154 с. Malahovskiy, Ya. E., Lapin, A. A. (1962). Kardannye peredachi. [Cardan transmissions]. M.: Gosudarstvennoe nauchno-tehnicheskoe izdatelstvo mashinostroitelnoy literatury, 154 s.
16. Гришкевич, А. И. (1984). Проектирование трансмиссий автомобилей. Справочник М.: Машиностроение, 272 с. Grishkevich, A. I. (1984). Proektirovanie transmissiy avtomobiley. [Vehicle transmission design]. Spravochnik. M.: Mashinostroenie, 272 s.
17. Бронштейн, И. Н. Семендяев, К. А. (1965). Справочник по математике. М.: Наука, 608 с. Bronshteyn, I. N. Semendyaev, K. A. (1965). Spravochnik po matematike. [Handbook of Mathematics]. M.: Nauka, 608 s.
18. Тарг, С. М. (2010). Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 416 с. Targ, S. M. (2010). Kratkiy kurs teoreticheskoy mehaniki. [Short Course of Theoretical Mechanics]. M.: Vysshaya shkola, 416 s.

Подригало Михайло Абович¹, д.т.н., професор, завідувач кафедри технології машинобудування та ремонту машин, тел. +380503011658, pmikhab@gmail.com,
ORCID: 0000-0002-1624-5219

Перегон Володимир Андрійович¹, к.т.н., проф. кафедри деталей машин і теорії механізмів і машин, тел. +380577073710.

Бобошко Олександр Андрійович¹, д.т.н. проф. кафедри деталей машин і теорії механізмів і машин, тел. +380506344821, ORCID: 0000-0003-1257-1954.

Богдан Дмитро Іванович¹, к.т.н., доц. кафедри деталей машин і теорії механізмів і машин, тел. +38099 334 3000, phd.bogdan@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5345-694X.

Коряк Олександр Олександрович¹, к.т.н., доц. кафедри деталей машин і теорії механізмів і машин, тел. +380957239067, alexanderalexkor@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9119-0660.

¹Харківський національний автомобільно-дорожній університет, 61002, Україна, м. Харків, вул. Ярослава Мудрого, 25.

Kinematics of Hooke's Joint

Abstract. Problem. An analysis of the literature has shown that some issues of the kinematics and dynamics of the Hooke's joint are not fully covered. In particular, this applies to the determination of the kinematic characteristics of the relative movements of the links in the movable joints of the crosspieces and cardan yokes, as well as the acceleration of the

crosspiece in the study of the hinge. These kinematic characteristics are the basis for dynamic analysis of the cardan transmission; they are used at research of operation of the bearings of a cardan joint cross; they are necessary to determine the energy expended to overcome the forces of friction in these kinematic pairs; they form the basis for evaluating transmission efficiency. **Goal.** The goal of this work is to determine the kinematic characteristics of the cross in its absolute and relative motions. **Methodology.** The research is based on the graphical and analytical method of kinematic analysis of spherical motion of a rigid body. At the initial stage, the calculated dependences for determining the angular velocity of the cross in its absolute and relative motions were obtained. The relative angles of rotation of the links in the movable joints of the crosspiece and cardan yokes were determined by integrating the corresponding differential equations. To determine the angular acceleration of the crosspiece, the theorem on the addition of angular accelerations of a rigid body rotating around two non-parallel axes was used. **Results.** The study of the kinematics of the cardan joint made it possible to identify and eliminate ambiguities in determining the relative angular velocities of the elements of the kinematic pairs of the cross and cardan yokes. Functional dependences for determination of angular acceleration of a crosspiece in absolute and relative movements, and also relative angles of rotation of links in kinematic pairs of a crosspiece and cardan yokes were received. It was shown that the angular acceleration of the crosspiece is a periodic function of the angle of rotation of the input link. During the operation of the hinge, the crosspiece creates insignificant periodic dynamic loads, which should be taken into account in accurate calculations of high-speed cardan transmissions. **Practical value.**

The work is devoted to the study of the kinematics of the asynchronous hinge, which is the foundation for its dynamic analysis and ultimately aimed at improving the output performance of the cardan transmission. The research method combines mathematical calculations with simplicity and clarity of graphic constructions, which contributes to a deeper understanding of the kinematic features of a hinge of uneven angular velocities. The obtained results can be used in the design and study of motor-transmission units, which include the Hooke's joint.

Key words: Hooke's joint, crosspiece, cardan yoke, angular velocity, spherical motion.

Podrigalo Mikhail¹ professor, Doct. of Science, Head of Department Engineering Technology and Machine Repair, tel. +380503011658, pmikhab@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1624-5219.

Peregón Volodymyr¹ professor, Machine Parts and Theory of Mechanisms and Machines Department, tel. +380577073710

Boboshko Oleksandr¹, professor, Doct. of Science, Machine Parts and Theory of Mechanisms and Machines Department, tel. +380506344821, ORCID: [0000-0003-1257-1954](https://orcid.org/0000-0003-1257-1954).

Bogdan Dmitriy¹, Ph.D., Assoc. Prof. Machine Parts and Theory of Mechanisms and Machines Department, tel. +38099 334 3000, phd.bogdan@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5345-694X.

Koriak Oleksandr¹, Ph.D., Assoc. Prof. Machine Parts and Theory of Mechanisms and Machines Department, tel. +380957239067, alexanderalexkor@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9119-0660.

¹Kharkov National Automobile and Highway University, 25, Yaroslava Mudrogo str., Kharkiv, 61002, Ukraine.